Endomorphismes normaux

Soit E un espace hermitien (par définition, de dimension finie). Un endomorphisme $u \in L(E)$ est dit *normal* s'il commute avec son adjoint u^*.

1. Montrer qu'un endomorphisme se diagonalise dans une certaine base orthonormée si et seulement s'il est normal. Quel théorème retrouve-t-on ainsi ?
2. Comment se résuisent les antihermitiens ? Et les unitaires ?

   On suppose à présent que E est euclidien, et on veut essayer de réduire les endomorphismes normaux en restant dans $\mathbb{R}$.
3. On suppose dans cette question seulement que E est de dimension 2. Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme n'admettant pas de valeur propre réelle. Montrer que, dans *toute* base orthonormée, la matrice de u est de forme
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$
4. Montrer alors que u est normal si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de forme
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & & a_s & -b_s \\ & & & & & & b_s & a_s \end{pmatrix}.$$
5. Comment se réduisent les endomorphismes antiautoadjoints ? Et les orthogonaux ?

Représentation de groupes finis II

Soit G un groupe fini. On appelle *représentation de* G la donnée d'un couple (V, ρ), où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et ρ un morphisme (pas forcément injectif ni surjectif) de G dans $GL(V)$. Si (V, ρ) est une représentation de G, une *sous-représentation* de V est un couple (W, ρ) où un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ stable par tous les $\rho(g)$. On dit que V est *irréductible* si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V lui-même.

1. On suppose dans cette question que G est fini et abélien. Montrer que, pour toute représentation (V, ρ), les éléments de $Im\,\rho$ sont alors codiagonalisables.
2. Soit (V, ρ) une représentation irréductible de G, et soit un endomorphisme $\varphi \in L(V)$ commutant avec tous les $\rho(g)$. Montrer que φ est une homothétie.
3. Soit (V, ρ) une représentation de G. Montrer que toute sous-représentation W admet un supplémentaire dans V qui soit une sous-représentation. On pourra munir V d'un produit scalaire pour lequel les $\rho(g)$ sont des isométries. Dans la suite, V sera supposé muni d'un tel produit scalaire.
4. Pour toute représentation (V, ρ) de G, on appelle *caractère* de cette représentation la fonction $\chi = Tr \circ \rho \colon G \longrightarrow \mathbb{C}^*$, et on note
$$V^G = \{x \in V | \forall g \in G, \rho(g)(x) = x\}.$$
Que dire de V^G ? Montrer que l'endomorphisme $\pi = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \rho(g)$ est un projecteur orthogonal d'image V^G. En déduire que
$$dim\, V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g).$$
5. Étant données deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) d'un même groupe G, on appelle *morphisme de représentations* toute application linéaire $\varphi \colon V_1 \longrightarrow V_2$ telle que pour tout $g \in G$, $\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$. En considérant le noyau et l'image de φ, montrer que si V_1 et V_2 sont irréductibles, alors φ est soit nulle, soit bijective.

   Remarque : On a montré à la question 2 que tout endomorphisme d'une représentation irréductible est une homothétie. Ceci est le lemme de Schur.

6. Une fonction $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *centrale* si $\forall g, h \in G,\ f(gh) = f(hg)$. On note $\mathcal{C}(G)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions centrales sur G, et on le munit du produit scalaire hermitien

$$< f, f' >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\overline{f'(g)}.$$

Rappeler pourquoi un caractère est central, puis, en utilisant le lemme de Schur montrer que les caractères associés aux représentations irréductibles de G, à isomorphisme de représentations près, forment un système orthonormal dans $\mathcal{C}(G)$. On pourra, étant données deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) de G, considérer la représentation $(L(V_1, V_2), \rho)$, où

$$\forall f \in L(V_1, V_2), \quad \rho(g)(f) = \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g)^{-1},$$

et étudier son caractère...

Déterminants de Gram et théorème de Müntz

Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe, de dimension finie ou infinie), et soient $x_1, \cdots, x_n$ n vecteurs de E. On appelle *matrice de Gram* de $x_1, \cdots, x_n$ la matrice $(< x_i, x_j >)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$, et *déterminant de Gram* le déterminant de cette matrice, que l'on note $Gram(x_1, \cdots, x_n)$.

1. Soit M une matrice carré de taille n. Montrer que M est hermitienne positive si et seulement si c'est une matrice de Gram. A quel condition est-elle définie ?
2. On suppose que la famille $x_1, \cdots, x_n$ est libre. Soit V le sous-espace de E qu'elle engendre, et soit $x \in E$. Démontrer la formule
$$d(x, V)^2 = \frac{Gram(x_1, \cdots, x_n, x)}{Gram(x_1, \cdots, x_n)}.$$
3. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. On le munit du produit scalaire
$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels, avec $\alpha_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto x^{\alpha_n} \in E$, et $V_n = Vect(f_0, \cdots, f_n)$. Soit $f : x \mapsto x^\beta \in E$, où $\beta > 0$. Calculer $d(f, V_n)$.
4. En déduire une condition pour que $V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_n$ soit dense dans E.

Polynômes orthogonaux

Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ non nulle.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant
$$< P, Q >= \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)dt.$$
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall n,\ \deg P_n = n$.
3. Montrer que pour tout n, P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et que ses racines sont toutes dans $]0,1[$.

Projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel.

1. Soit $x \in E$. On note $F_x = \{y \in F | \|x-y\| = d(x,F)\}$. Montrer que $y \in F_x$ si et seulement si $x - y \in F^\perp$.
2. Montrer que F_x a *au plus* un seul élément.
3. On suppose dans cette question que F est complet. Montrer qu'alors F_x n'est pas vide ; on note x_F son élément. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$, et que $x \mapsto x_F$ n'est autre que la projection orthogonale sur F. Que vaut $(F^\perp)^\perp$?
4. On prend ici $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E | f(0) = 0\}$. Que vaut $F^\perp$? Conclure.

Connexités

1. Montrer qu'un espace métrique connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.
2. Donner un exemple d'espace métrique connexe mais pas connexe par arcs.

Valeurs d'adhérence

Soit (X,d) un espace métrique, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X, telle que $\lim_{n\to+\infty} d(u_n,u_{n+1}) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est connexe.

Groupes topologiques

On appelle *groupe topologique* tout espace métrique muni en outre d'une structure de groupe telle que la loi de groupe et l'inversion du groupe soient continues. Montrer que la *composante neutre*, c'est-à-dire la composante connexe du neutre, est un sous-groupe distingué. Quelle est la composante neutre de $GL_n(\mathbb{R})$?