Sphère orthoptique

Soient a, b, c trois réels strictement positifs. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la surface S d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Déterminer le lieu des points par lesquels passent trois plans tangents à S deux-à-deux perpendiculaires.

Lieu médian

Soient D et D' deux droites non coplanaires de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le lieu des points équidistants à D et à D'.

Tangentes à une ellipse

On fixe un repère orthonormé du plan, et on considère l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. Soit M un point de coordonnées (x_M, y_M) telles que $\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2} > 1$, et soient A et B les deux points de l'ellipse tels que les tangentes à celle-ci en A et en B passent par M. Déterminer une équation de la droite (AB).

Points rationnels

$\mathbb{R}^2$ étant muni d'un repère orthonormé, on dit qu'un point est *rationnel* si ses deux coordonnées sont rationnelles. Montrer qu'une ellipse non dégénérée du plan qui admet une équation à coefficients rationnels a soit une infinité de points rationnels, soit aucun.

Enveloppe d'une famille de droites

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé.

1. Soit I un intervalle ouvert non vide de R, et a, b et c trois applications de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$, telles que a et b ne s'annulent pas simultanément. Pour chaque valeur du paramètre $\lambda \in I$, on définit la droite D_λ d'équation $a(\lambda)x + b(\lambda)y + c(\lambda) = 0$, et on obtient ainsi une *famille de droites* $(D_\lambda)_{\lambda\in I}$. Montrer qu'il existe en général une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour toute valeur de λ, la droite D_λ soit tangente à cette courbe. On pourra en rechercher un paramétrage... Cette courbe s'appelle l'*enveloppe* de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in I}$, expliquer pourquoi.
2. On fixe deux mâts infinis perpendiculairement, et on astreint une tige de longueur L à se déplacer dans le plan des mâts de telle sorte que la première extrémité de la tige ne quitte jamais le premier mât, et de même que sa seconde extrémité coulisse le long du deuxième mât. On forme la famille des droites prolongeant la tige dans toutes ses positions possibles, déterminer un paramétrage de son enveloppe, et la tracer. Comment s'appelle cette courbe ?

Développantes et pendule de Huygens

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé.

1. Soit $\mathcal{C}$ un arc birégulier, et soit $\mathcal{D}$ sa *développée*, c'est-à-dire le lieu de ses centres de courbure. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{D}$ soit régulière en le centre de courbure I de $\mathcal{C}$ en M, la tangente à $\mathcal{D}$ en I coïncide avec la normale à $\mathcal{C}$ en M.
2. Étant donné un arc birégulier $\mathcal{C}$, on cherche ses *développantes*, c'est-à-dire les arcs biréguliers $\mathcal{B}$ dont la développée est $\mathcal{C}$. Montrer qu'un tel arc admet un paramétrage par une abscisse curviligne s de $\mathcal{C}$ de forme
$$\mu(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T(s)}$$
où $(M(s), \overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)})$ désigne le repère de Frénet de $\mathcal{C}$, et où λ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, dont on évaluera la dérivée.
3. Montrer que réciproquement, si l'application λ vérifie les conditions précédentes, l'arc $\mathcal{B}$ défini par
$$\mu(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T(s)}$$
est birégulier, sauf peut-être en un point, et que sa développée est bien $\mathcal{C}$.
4. Quel est le rapport entre une développante d'un cercle et une bobine de fil ? Généraliser.
5. On admet qu'une cycloïde renversée est *tautochrone*. Le pendule réalisé par l'oscillation d'un point matériel dans une de ses arches, dit *pendule de Huygens*, est donc parfaitement isochrone ; toutefois il s'amortit très vite à cause des frottements solides...

   Calculer les développantes d'une cycloïde renversée, et en déduire un moyen de réaliser malgré tout un pendule de Huygens.

Groupe modulaire

Soit X un ensemble, et soit G un groupe. On dit que G *agit* (ou *opère*) sur X si on s'est donné un morphisme (pas forcément injectif, et même éventuellement trivial) de G dans le groupe des permutations $\mathfrak{S}(X)$. On note alors $g \cdot x \in X$ l'action d'un élément $g \in G$ sur un élément $x \in X$. Si $x \in X$, on dispose de son *stabilisateur*

$$Stab_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subseteq G$$

et de son *orbite*

$$G \cdot x = \{g \cdot x,\ g \in G\} \subseteq X.$$

On considère dans cet exercice le *demi-plan supérieur de Poincaré* $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$. Le *groupe modulaire* $G = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$ agit sur $\mathcal{H}$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

1. Vérifier que cette action est bien définie, et qu'elle est *fidèle*, autrement dit que $\bigcap_{z \in \mathcal{H}} Stab_z$ est trivial.
2. On note S et T les éléments de G représentés respectivement par

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expliciter l'action de S et de T. Calculer S^2 et $(ST)^3$. On note G_0 le sous-groupe de G engendré par S et par T.

3. On note $\mathcal{F}$ la partie

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathcal{H} \;\middle|\; |z| \geqslant 1 \text{ et } |\Re z| \leqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

On va montrer que $\mathcal{F}$ est ce que l'on appelle un *domaine fondamental*, c'est-à-dire qu'il contient "à peu près" un représentant de chaque orbite de $\mathcal{H}$. Plus précisément, démontrer les assertions suivantes :

(a) $\forall z \in \mathcal{H}, \exists g \in G_0 \colon g \cdot z \in \mathcal{F}$.
Indication : On pourra montrer que $\sup_{g\in G_0} \Im(g \cdot z)$ est atteint.

(b) Si deux éléments distincts $z \neq z'$ de $\mathcal{F}$ sont dans la même orbite sous G, alors
– soit $|\Re z| = |\Re z'| = \frac{1}{2}$, et alors $z' = T \cdot z$ ou $z' = T^{-1} \cdot z$,
– soit $|z| = |z'| = 1$, et alors $z' = S \cdot z$.

(c) Les stabilisateurs des éléments $\mathcal{F}$ sont tous triviaux, sauf :
– $Stab_i = \langle S \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
– $Stab_j = \langle ST \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,
– $Stab_{-\bar{j}} = \langle TS \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

4. En déduire que $G = G_0$.
Remarque : On peut montrer que

$$\langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle$$

est une *présentation* de G, et donc $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Théorème de Pick

Un point du plan affine $\mathbb{R}^2$ est dit *entier* si ses coordonnées sont entières. Un polygone est dit *entier* si ses sommets sont entiers.

Soit P un polygone entier non croisé. On note
– I le nombre de points entiers contenus dans l'intérieur de P,
– F le nombre de points entiers contenus dans la frontière de P,
– et A l'aire de P.

Démontrer le *théorème de Pick* :

$$A = I + \frac{F}{2} - 1.$$

Billard convexe compact

Une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^\infty$ délimite un compact convexe K de $\mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, il est possible de jouer au billard dans K pour former une trajectoire périodique avec n rebonds.

Alernative de Steiner

On se donne dans le plan deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, des centres respectifs O et O', $\mathcal{C}'$ étant contenu dans le disque ouvert délimité par $\mathcal{C}$. On chosit alors un cercle $\mathcal{C}_1$ entre $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ et qui leur est tangent, puis on définit par récurrence une suite de cercles $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathcal{C}_{n+1}$ soit entre $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$, et tangent à $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_n$. On souhaite démontrer l'*alternative de Steiner* :

- Soit la suite $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est jamais périodique,
- soit il existe un entier N telle que la suite $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est N-périodique, indépendamment du choix de $\mathcal{C}_0$.

1. Dans quel cas particulier est-ce évident ?

   Dans la suite, on va chercher à se ramener à ce cas en exhibant une transformation qui transforme la figure en ce cas particulier, et qui transforme tout cercle en cercle.

2. Soit Γ un cercle de centre Ω et de rayon R, et soit A un point n'appartenant pas à Γ. On définit la *puissance de A par rapport à Γ*, que l'on note $\mathcal{P}_\Gamma(A)$, comme suit : On trace une droite passant par A, qui coupe Γ en M et en N, et on pose

   $$\mathcal{P}_\Gamma(A) = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}.$$

   Montrer que $\mathcal{P}_\Gamma(A)$ est bien défini, et l'exprimer en fonction de A, R et Ω.

3. On choisit une origine O, on identifie le plan affine à $\mathbb{C}$, et on lui adjoint un *point à l'infini* ∞. On appelle alors cercle toute droite réunie à $\{\infty\}$, ou tout cercle usuel. On définit, pour tout réel $k > 0$, l'*inversion de centre O et de rapport k* par

   $$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}(O,k)\colon & \mathbb{C}\cup\{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ & O & \longmapsto & \infty \\ & \infty & \longmapsto & O \\ & M & \longmapsto & M' \text{ tel que } \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}. \end{array}$$

   Exprimer $\mathcal{I}(O,k)$ en fonction des affixes complexes. Quel est le groupe pour la composition engendré par les $\mathcal{I}(O,k)$, $k>0$? Montrer (en distinguant soigneusement les cas) que l'image d'un cercle par $\mathcal{I}(O,k)$ est un cercle.

4. Après avoir défini cette notion, montrer qu'une inversion conserve les angles non orientés entre arcs de classe $\mathcal{C}^1$.

5. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres et rayons respectifs O, R et O', R'. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si et seulement si $OO'^2 = R^2 + R'^2$.
6. On attaque enfin le problème de départ, dont on reprend les notations. Montrer qu'il existe deux points A et B tels qu'un cercle Γ est orthogonal à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ si et seulement s'il passe par A et B. Conclure !

Sous-groupe affine

Soit E un espace affine de dimension n, et soit G un sous groupe fini de $GA(E)$. Montrer qu'il existe un point de E fixe par tous les éléments de G. Montrer aussi que G est isomorphe à un sous-groupe du goupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$.

Simplexes réguliers

Lorsque $p \leqslant q$, on injecte $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ par $(x_1, \cdots, x_p) \mapsto (x_1, \cdots, x_p, 0 \cdots, 0)$, ce qui permet de définir la *limite inductive* des $\mathbb{R}^n$ par

$$\mathbb{R}^\infty = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n.$$

On fixe une bonne fois pour toutes un réel $a > 0$, et on définit par récurrence une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^\infty$ par $A_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geqslant 1, A_n \in \mathbb{R}^n, \forall i < n, A_iA_n = a$. On appelle alors n-*simplexe* régulier le polyèdre Σ_n de $\mathbb{R}^n$ de sommets $A_0, A_1, \cdots, A_n$.

1. Justifier l'existence d'une telle suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comment appelle-t-on un n-simplexe régulier pour $0 \leqslant n \leqslant 3$?
2. Calculer l'isobarycentre G_n de Σ_n.
3. Montrer que le groupe des isométries directes laissant Σ_n globalement invariant est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_{n+1}$.

Courbes implicites

Tracer les courbes admettant dans un repère orthonormé les équations

1. $x^4 + y^4 + 2x^3 + x(x + y) = 0$,
2. $x^2 - y^2 = \sin xy$.