## Pour commencer

Résoudre $y'' + y = \tan t$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

## Explosion en temps fini

Existe-t-il une application $f$ positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall t \geqslant 0$, $f'(t) > f(t)^2$ ?

## Lemme de Gronwall

1. Soient $\varphi$, $\psi$ et $y$ trois applications continues et positives sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que
$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$
Montrer que
$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right) ds.$$
Simplifier ce résultat dans le cas où $\varphi$ est constante.
2. Soit $q\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante. Montrer que toute solution réelle de l'équation différentielle
$$y''(t) + q(t)y(t) = 0$$
est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

## Théorème de Floquet

On considère sur $\mathbb{C}^n$ un système différentiel $(E)$ de forme $Y'(t) = A(t)Y(t)$, où $A\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue et $T$-périodique.

1. Montrer l'existence d'une solution non nulle $\Phi$ de $(E)$ telle que
$$\exists \lambda \in \mathbb{C}\colon \forall t \in \mathbb{R}, \quad V(t+T) = \lambda V(t).$$
2. Soit $M(t)$ une matrice dont les colonnes forment une base de l'espace des solutions de $(E)$. Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)A.$$
Montrer que $A$ est inversible.

## Autour du théorème de Sturm

Soit $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y''(t) + q(t)y(t) = 0.$$

On suppose que ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que $q$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $y$ une solution bornée de $(E)$, étudier le comportement de $y'$ à l'infini. Montrer que $(E)$ admet des solutions non bornées.
2. Soit $y$ une solution non nulle de $(E)$. Montrer que
   (a) si $q$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par une constante $M > 0$, alors deux éventuels zéros $t_1 \neq t_2$ de $y$ vérifient toujours $|t_1 - t_2| \geqslant \frac{\pi}{\sqrt{M}}$,
   (b) si $q$ est minorée par une constante $m > 0$, alors $y$ s'annule au moins une fois sur tout segment d'amplitude $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.
3. On suppose dans cette question que $q$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les solutions réelles bornées de $(E)$ ?

## Quelques équations non linéaires

On s'intéresse à certaines équations particulières.

1. (Équation de Bernouilli) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b$ deux applications continues sur un intervlle de $\mathbb{R}$. Comment résoudre

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\alpha \ ?$$

   Quand peut-on faire des raccords avec la fonction nulle ?
2. (Équation de Ricatti) Soient $a$, $b$ et $c$ trois applications continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Comment résoudre complétement l'équation différentielle

$$y'(t) = a(t)y(t)^2 + b(t)y(t) + c(t)$$

   si d'aventure on en connaît une solution $y_0$ ?
3. (Application) Quelles sont les solutions réelles maximales de $y' + y + y^2 + 1 = 0$ ?

**Théorème de Lyapunov**

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 0. On considère l'équation différentielle

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & f(y) \\ y(0) & = & y_0 \in \mathbb{R}^n \end{array}\right. .$$

On suppose qu'il existe un voisinage $V$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que si $y_0 \in V$, alors la solution maximale de $(E)$ est définie au moins sur $\mathbb{R}^+$ tout entier. Notre but est de montrer que, sous certaines conditions,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

dès que $y_0$ est dans un voisinage $W \subseteq V$ de 0.

1. On suppose tout d'abord que $(E)$ est linéaire à coefficents constants : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de $f$ pour que toute solution de $(E)$ tende vers 0 à l'infini, puis démontrer cette conjecture.

   *Indication : on pourra utiliser la décomposition de Dunford.*

2. On revient au cas général où $f$ n'est pas linéaire. On dorénavant suppose que la différentielle $df(0)$ de $f$ vérifie la condition de la question précédente. On définit sur $\mathbb{R}^n$

   $$\varphi(x,y) = \int_0^{+\infty} \langle e^{t\,df(0)}x, e^{t\,df(0)}y\rangle dt$$

   où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Vérifier que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On note $q$ son carré scalaire.

3. Étudier $q(y(t))$ pour $y$ solution de $(E)$, et conclure.

   *Des dessins seront les bienvenus.*

## Intégration numérique

Soient $T > 0$, $I = [0, T]$, et $f\colon I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, $L$-lipschtzienne en la seconde variable :

$$\forall t \in I,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant \|x - y\|.$$

On suppose que l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ admet une solution sur $I$, et on cherche à l'approximer numériquement par la méthode d'Euler. On prend donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et on pose $h = T/n$, $t_k = kh$, $y_0 = y(0)$ et $y_k = y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1})$. On se propose de majorer les erreurs

$$e_k = \|y_k - y(t_k)\|.$$

1. Montrer que $y$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $\varepsilon_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) - hf(t_{k-1}, y_{k-1})$ ; montrer que pour tout $k \leqslant n$, $\|\varepsilon_k\| \leqslant Mh^2/2$, où $M = \|y''\|_\infty$.
2. En déduire que pour tout $k \leqslant n$, $\|e_k\| \leqslant \frac{Mh}{2L} e^{Lt_k}$.

## Retour sur les explosions en temps fini

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $f\colon ]a, b[ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. On considère une solution maximale $\varphi\colon ]\alpha, \beta[ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. Montrer que si $\beta < b$, alors $\varphi$ n'est pas bornée en $\beta$.

## Retour sur la périodicité

Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'équation différentielle $y'' - y = f$ admet au plus une solution périodique.

## Plan stable par translations

Déterminer tous les sous-espaces de dimension 2 de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par les opérateurs de translation

$$\tau_a\colon f \longmapsto (x \mapsto f(x - a)) \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

## Application minorée

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application minorée de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|\nabla f\| = 0.$$

**Mur du son**

On considère l'*équation de Burger*

$$(\mathcal{B}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \\ u(t=0,x) & = & u_0(x) \end{array} \right.$$

où $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si $(\mathcal{B})$ admet une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $u_0$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

**Encore de la périodicité ?**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont aucune des valeurs propres n'est multiple entier de $2i\pi$, et $b \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une application continue et $T$-périodique. Montrer que l'équation différentielle

$$y'(t) = Ay(t) + b(t)$$

admet exactement une solution $T$-périodique.

**Stabilité asymptotique d'un système linéaire**

On considère un système linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$$(L) \qquad Y'(t) = A(t)Y(t)$$

où $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application continue telle que la matrice symétrique ${}^tA(t) + A(t)$ soit négative pour tout $t$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\langle Y_1(t), Y_2(t) \rangle$ converge lorsque $t \to +\infty$ pour tout couple de solutions $(Y_1, Y_2)$ de $(L)$.
2. Montrer que $(L)$ admet une solution non identiquement nulle convergeant vers 0 en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t tr(A(u))du = -\infty.$$

**Théorème des extréma liés**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f, g_1, \cdots, g_r \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On définit

$$\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que si $f_{|\Gamma}$ atteint un extremum local en un point $a \in \Gamma$ où les différentielles $dg_1(a), \cdots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a).$$

1. Expliquer pourquoi on peut immédiatement se ramener au cas $r < n$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert $V$ de $a$ contenu dans $U$ dans lesquels $\Gamma$ se présente sous la forme

   $$\Gamma \cap V = \{(x_1, \cdots, x_n) \in V \mid (x_1, \cdots, x_r) = \varphi(x_{r+1}, \cdots, x_n)\},$$

   où $\varphi$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie au voisinage de $\alpha = (a_{r+1}, \cdots, a_n)$.
3. Montrer que si on pose $g = (g_1, \cdots, g_r)$, alors

   $$Ker\, dg(a) = \{(h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n \mid (h_1, \cdots, h_r) = d\varphi(\alpha)(h_{r+1}, \cdots, h_n)\}.$$

4. En déduire que $Ker\, dg(a) \subset Ker\, df(a)$, et conclure.
5. Soient $a_0, \cdots, a_n$ $n+1$ réels. Démontrer l'*inégalité de Hilbert* :

   $$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} < \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

**Sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^n$**

Une application différentiable sera qualifiée d'*immersion* (respectivement de *submersion*) en un point si sa différentielle est injective (respectivement surjective). Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. *Des dessins seront appréciés.*

1. Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une immersion en $x$ de classe $\mathcal{C}^k$. Montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\phi$ sur un voisinage de $f(x)$ tel que, au voisinage de $x$,
$$\phi \circ f(x_1, \cdots, x_p) = (x_1, \cdots, x_p, 0 \cdots, 0).$$
2. Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une submersion en $x$ de classe $\mathcal{C}^k$. Montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\psi$ sur un voisinage de $x$ tel que, au voisinage de $x$,
$$f \circ \psi(x_1, \cdots, x_p) = (x_1, \cdots, x_q).$$
3. On fixe des entiers non nuls $d \leqslant n$, une partie $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Montrer que s'équivalent
   (a) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U$ de $x$ dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage $V$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $f\colon U \longrightarrow V$ tels que $f(U \cap X) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.
   (b) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U$ de $x$ dans $\mathbb{R}^n$ et une application $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^k$ qui est une submersion en $x$ tels que $U \cap X = f^{-1}(\{0\})$.
   (c) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U$ de $x$ dans $\mathbb{R}^n$, une identification linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^{n-d}$ et application $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que $U \cap X$ soit le graphe de $f$.
   (d) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U$ de $x$ dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage $V$ de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et une application $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ qui est une immersion en 0 telle que $f(0) = x$ et qui est un homéomorpisme de $V$ sur $U \cap X$.

   Si ces conditions sont vérifiées, on dit alors que $X$ est une *sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d$.*
4. Montrer que la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ en est une sous-variété différentielle. Quelle est sa dimension ? Mêmes questions pour $\mathcal{O}(n) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.