Compacité et séparabilité

Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

Somme de parties

Soient E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On note

$$A + B = \left\{ a + b \middle| a \in A, b \in B \right\}.$$

1. On suppose A ouvert. Montrer que $A + B$ est ouvert.
2. On suppose A fermé et B compact. Montrer que $A + B$ est fermé.
3. Est-ce encore vrai si B est seulement fermé ?

Théorème du point fixe, version compacte

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f\colon X \longrightarrow X$ une application telle que

$$\forall (x, y) \in X^2, x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Proposer une méthode d'approximation de ce point fixe.
3. Le résultat de la première question subsiste-t-il si on suppose seulement X complet ? Et si X est compact, mais f n'est qu'1-lipschitzienne ?

Théorème de Kakutani commutatif

Soient E un espace vectoriel normé, K une partie compacte convexe de E, et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications affines continues de K dans K commutant deux à deux. Démontrer que les f_i admettent un point fixe commun.

Compacité, continuité, injectivité...

Soient E et F deux espaces métriques, et f une application de E dans F.

1. Dans cette question seulement, on suppose que E est compact et que f est une bijection continue. Montrer qu'alors f est un homéomorphisme.
2. On suppose que l'image par f de tout compact de E est compacte. On suppose de plus que f est injective. Montrer qu'alors f est continue.
3. Que dire si f n'est plus supposée injective ?

L'algèbre des fonctions continues sur un compact

Un idéal d'un anneau commutatif sera dit *propre* s'il est différent de l'anneau tout entier, et *maximal* s'il est maximal pour l'inclusion parmi les idéaux propres.

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des applications continues de X dans $\mathbb{K}$.

1. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal propre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$. Démontrer que les éléments de $\mathfrak{I}$ ont (au moins) un zéro commun.
2. Quels sont les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$?
3. Quels sont les morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$?
4. On suppose à présent que X et X' sont deux compacts de $\mathbb{K}$. Montrer que tout morphisme d'algèbres de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}(X', \mathbb{K})$ s'écrit $f \mapsto f \circ \alpha$, où α est une application continue de X' dans X.
5. En déduire qu'un tel morphisme est toujours continu pour la norme uniforme. En déduire aussi une condition nécessaire et suffisante pour que les algèbres $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(X', \mathbb{K})$ soient isomorphes.

Distance de Hausdorff

Soient (X, d) un espace métrique, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées bornées non vides de X. Lorsque A et B sont dans $\mathcal{F}$, on note

$$\delta(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \quad \text{et} \quad \Delta(A, B) = \max(\delta(A, B), \delta(B, A)).$$

1. Interpréter Δ, et montrer qu'il s'agit d'une distance sur $\mathcal{F}$. On considère désormais $\mathcal{F}$ comme l'espace métrique $(\mathcal{F}, \Delta)$.
2. Lorsque n est un entier naturel non nul, on note $\mathcal{F}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des éléments de cardinal supérieur ou égal à n. Montrer que ces $\mathcal{F}_n$ sont des ouverts de $\mathcal{F}$.
3. On suppose dorénavant X compact. Montrer que toute suite de Cauchy *décroissante* $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ converge vers sa *borne inférieure* $Y = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \downarrow Y_n$. En déduire que $\mathcal{F}$ est complet.
4. Montrer que $\mathcal{F}$ est compact.

Compacité et isométries

Soient X un espace métrique compact, et f une isométrie de X dans lui-même. Montrer que f est bijective. En déduire que, lorsque X et Y sont deux espaces métriques compacts, si $f\colon X \longrightarrow Y$ et $g\colon Y \longrightarrow X$ sont des isométries, elles sont bijectives.

Recouvrement ouvert

Soit X un espace métrique compact, et soit $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'il existe un réel α strictement positif tel que toute boule ouverte de rayon α de X soit contenue dans un des Ω_λ.

Autour du théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel normé.

1. On suppose E de dimension infinie. Expliquer "intuitivement" pourquoi la boule unité de E ne peut pas être compacte, puis démontrer ce fait.
2. Que dire si la sphère unité de E est compacte ?

Distance entre deux parties

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X. A-t-on nécessairement $d(F_1, F_2) \neq 0$? Et si F_1 est compact ?
2. Soient K_1 et K_2 deux compacts de X. Montrer que la distance de K_1 à K_2 est atteinte. Est-ce encore vrai si K_1 est seulement fermé ?
3. On suppose que $X = \mathbb{R}^n$. Soient K un compact et F un fermé de X. Montrer que la distance de K à F est atteinte.

Applications propres

1. Soient X et Y deux espaces métriques et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue par laquelle l'image réciproque de tout compact est compacte (on dit que f est *propre*). Montrer que f est fermée. Existe-t-il des applications continues non fermées ?
2. Soit n un entier naturel non nul fixé une fois pour toutes. On note
$$\mathbb{R}_n[X] = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \middle| degP \leq n \right\}.$$
Montrer que l'ensemble $\Gamma_n \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes unitaires scindés de degré n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Opérateurs compacts ★

Soit E un espace de Banach. On note $L_c(E)$ l'algèbre des endomorphismes continus, ou opérateurs, de E, et $B \subset E$ la boule unité fermée de E. Un opérateur $T \in L_c(E)$ est dit *compact* si $\overline{T(B)} \subset E$ est compact. On note $K(E)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E, et $RF(E) \subseteq L_c(E)$ l'ensemble des opérateurs continus de rang fini de E.

1. Montrer qu'un opérateur compact est continu.
2. Montrer que $RF(E)$ est un idéal bilatère de $L_c(E)$. Est-il fermé ?
3. Montrer que $K(E)$ est un idéal bilatère de $L_c(E)$. Est-il fermé ?
4. Montrer l'inclusion $\overline{RF(E)} \subseteq K(E)$.
5. On suppose pour finir que E est un espace de Hilbert. Montrer que $\overline{RF(E)} = K(E)$.

Factorisation de fonction

Soient $n \geqslant 2$ un entier, $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
On suppose que f admet (au moins) n zéros $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $u \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(u)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Plus vite !

Un candidat à l'X court le 100 mètres en 10 secondes. Montrer que si ses vitesses initiale et finale sont nulles, alors il y a un moment où son accélération est supérieure à $4 m.s^{-2}$.