Pour commencer, une intégrale !

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt.$$

Puis une série !

Nature et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$.

Un peu plus difficile

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} |\sin x|^x\,dx.$$

Le retour des séries

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha+(-1)^n}$, où $\alpha>0$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}+e^{in\varphi}}$, où $\theta,\,\varphi\in\mathbb{R}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha+e^{in\varphi}}$, où $\theta,\,\varphi\in\mathbb{R}$ et $\alpha>0$.

Comparaison série - intégrale

1. Soit $f\colon]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_1^{+\infty}|f'(t)|dt$ converge. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\geqslant 1}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ ont même nature.
2. En déduire la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$$

en fonction du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$. On pourra commencer par le cas $\alpha>1/2$.

Série lentement convergente

1. (Préliminaire) En considérant l'application

$$g : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \end{array},$$

déterminer la valeur de l'*intégrale de Gauss*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et soit non nulle. Etablir, pour tout $t > 0$, la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) ,$$

et donner un équivalent de sa somme lorsque $t \to 0^+$.

3. En déduire un équivalent, lorsque $x \to 1^-$, de

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}.$$

Développement asymptotique de la série harmonique

On pose, pour tout n entier naturel non nul, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Calculer le développement asymptotique à quatre termes de H_n.

Itération du sinus

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$. On pourra étudier $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ pour α bien choisi.

Somme de sommes

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose dans cette question que $\sum u_n$ diverge, et on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.
On suppose à présent que $u_n = o(S_n)$ lorsque $n \to +\infty$. Exprimer en fonction de S_n et de α un équivalent des sommes partielles de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ lorsqu'elle diverge, et de ses restes lorsqu'elle converge.
2. On suppose dans cette question que $\sum u_n$ converge, et on pose
$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k.$$
Discuter en fonction du paramètre $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.
On suppose à présent que $u_n = o(R_n)$ lorsque $n \to +\infty$. Exprimer en fonction de R_n et de α un équivalent des sommes partielles de la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ lorsqu'elle diverge, et de ses restes lorsqu'elle converge.

Zone d'importance 1

On considère l'intégrale à paramètre
$$\begin{array}{rccl} I: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx \end{array}.$$
Vérifier qu'elle est bien définie, et en donner un équivalent lorsque $t \to 0^+$.

Zone d'importance 2 : phase stationnaire

Donner un équivalent lorsque $t \to +\infty$ de l'intégrale à paramètre
$$\begin{array}{rccl} I: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1} \cos x \; e^{it\,\mathrm{ch} x} dx \end{array}.$$

Méthode de Laplace

On rappelle que la *fonction gamma*, définie par

$$\begin{array}{rccl} \Gamma: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \end{array},$$

vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$, ainsi que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Le but de ce problème est de trouver un équivalent en $+\infty$ d'intégrales à paramètre de forme

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{tg(x)}dx$$

où les fonctions f et g vérifient certaines conditions.

1. (Préliminaire) Soient $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $c > 0$ et $b \in]0,+\infty]$. On pose, pour tout $t > 0$,
$$J(t) = \int_0^b x^\alpha e^{-tcx^\beta}dx.$$
Montrer que lorsque $t \to +\infty$,
$$J(t) \sim \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

Soient à présent f et g deux applications localement continues par morceaux de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que
(i) L'intégrale $\int_0^{+\infty}|f(x)|e^{g(x)}dx$ converge,
(ii) $\exists \delta_0 > 0\colon \forall \delta \in]0,\delta_0[, \forall x \geqslant \delta, g(x) \leqslant g(\delta)$,
(iii) On ait en 0^+ les développements asymptotiques $f(x) \sim Ax^\alpha$ et $g(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta)$, avec $\alpha > 1$, $c > 0$ et $\beta > 0$.
On pose alors, pour $t \geqslant 1$,
$$I(t) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{tg(x)}dx.$$
L'objet des prochaines questions est de prouver que, lorsque $t \to +\infty$,
$$I(t) \sim \frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)e^{at}(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

2. Expliquer comment on peut se ramener au cas $a = 0$ et $A = 1$.
   On fixe à présent $\varepsilon \in]0, 1[$, et on pose, pour alléger le calcul,
$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$
3. Montrer que $\exists \delta \in]0, \delta_0[, \exists t_1 > 0 \colon \forall t \geqslant t_1$,
$$(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t) \leqslant \int_0^\delta f(x)e^{tg(x)}dx \leqslant (1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t).$$
4. Montrer que, δ et t_1 étant ainsi fixés, il existe aussi $t_2 > 0$ tel que
$$\forall t \geqslant t_2\,, \int_\delta^{+\infty} |f(x)|e^{tg(x)}dx \leqslant \varepsilon\varphi(t),$$
   et conclure.
5. (Corollaire) Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et soient f et g deux fonctions de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, f étant localement continue par morceaux et g étant de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant
   (i) L'intégrale $\int_a^b |f(x)|e^{g(x)}dx$ converge, et
   (ii) g' ne change de signe qu'en un seul point $c \in]a, b[$, où de plus g atteint son maximum, avec $f(c) \neq 0$ et $g''(c) < 0$.
   Montrer que, lorsque $t \to +\infty$,
$$\int_a^b f(x)e^{tg(x)}dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(c)|t}}\,f(c)e^{tg(c)}.$$
6. (Application) Montrer la *formule de Stirling généralisée* :
   Lorsque $x \to +\infty$, $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}$.
7. (Application) Donner un équivalent, lorsque $t \to +\infty$, de la *transformée de Mellin*
$$\mathcal{M}\{\sin\} \colon t \longmapsto \int_0^\pi x^{t-1}\sin x\,dx.$$
8. (Application) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un équivalent, lorsque $t \to 0^+$, de
$$I(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - tx\right)dx.$$