Tout d'abord, une intégrale

Que pensez vous de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \quad ?$$

Ensuite, quelques séries

Quelle est la nature des séries suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$, où $\theta \in \mathbb{C}$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$.

Un peu plus difficile

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} |\sin x|^x dx.$$

Le retour des séries

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$, où $\alpha > 0$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n} + e^{in\varphi}}$, où θ, $\varphi \in \mathbb{R}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha + e^{in\varphi}}$, où θ, $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

Comparaison série - intégrale

1. Soit $f\colon]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_1^{+\infty} |f'(t)|dt$ converge. Montrer que la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\geqslant 1}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ ont même nature.
2. En déduire la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$$

en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. On pourra commencer par le cas $\alpha > 1/2$.

Un calcul de somme

Pour tout n entier naturel, on note $\nu(n)$ le nombre de 1 dans l'écriture de n en base 2. Justifier la convergence et sommer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu(n)}{n(n+1)}.$$

Equivalent d'intégrales

1. Donner un équivalent, lorsque $x \to +\infty$, de

$$\int_0^x e^{t^2} dt.$$

2. Quelle est la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt \ ?$$

Donner un équivalent de son reste en $+\infty$.

Séries de Dirichlet

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ l'espace les suites complexes. Lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un élément de E et $s \in \mathbb{R}$, on définit (sous réserve de convergence)

$$A(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

On pose aussi

$$\sigma(a) = \sigma(A) = \inf\left\{ s \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \text{ converge absolument } \right\} \in \bar{\mathbb{R}}.$$

1. Que vaut $\sigma(a)$ si a est la suite constante égale à 1 ? Donner des exemples de suites a telles que $\sigma(a) = -\infty$ et $+\infty$. Peut-il exister $\varepsilon > 0$ telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge encore pour $s \in]\sigma(a) - \varepsilon, \sigma(a)]$ alors que $\sigma(a) \in \mathbb{R}$?
2. Lorsque a et b sont deux éléments de E, on définit leur *produit de convolution* $a \star b \in E$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ (a \star b)_n = \sum_{d|n} a_d \ b_{\frac{n}{d}}.$$

   Montrer que $\star$ est associatif et commutatif. Admet-il un élément neutre ? Montrer que $(E, +, \star)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire. Quels sont ses inversibles ?
3. Soient 1 la suite constante égale à 1, δ la suite valant 1 en 1 et 0 ailleurs, Id la suite identité, φ l'indicatrice d'Euler et μ la fonction de Möbius. On rappelle que μ est définie ainsi :

$$\mu(n) = 0 \text{ si n a un facteur carré, } \mu\left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right) = (-1)^r \text{ , } p_i \text{ premiers distincts, sinon.}$$

   Calculer $\mu \star 1$, et en déduire que $\varphi = \mu \star Id$.
4. Soient a et b deux éléments de E. Montrer que pour $s > \max(\sigma(a), \sigma(b))$, on a la relation

$$A(s)B(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a \star b)_n}{n^s}.$$

5. Donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de
$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Somme de puissances

Donner un équivalent, quand $n \to +\infty$, de
$$\sum_{k=1}^{n} k^n.$$

Arithmétique et séries

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\Pi(n)$ son plus grand facteur premier. Démontrer la convergence de la série
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n\Pi(n)}.$$

Théorème de Fejér

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. On pose
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}.$$
Que cherche-t-on à faire ? Montrer qu'*en moyenne de Cesàro*, $S_n(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Quel théorème retrouve-t-on ainsi ?

Zone d'importance 1

On considère l'intégrale à paramètre
$$\begin{array}{rccc} I : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx \end{array}.$$
Vérifier qu'elle est bien définie, et en donner un équivalent lorsque $t \to 0^+$.

Zone d'importance 2 : phase stationnaire

Donner un équivalent, lorsque $t \to +\infty$, de l'intégrale à paramètre
$$\begin{array}{rccc} I : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{1} \cos x \; e^{it \operatorname{ch} x} dx \end{array}.$$

Méthode de Laplace

On rappelle que la *fonction gamma*, définie par

$$\begin{array}{rccl}\Gamma : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\end{array},$$

vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$, ainsi que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Le but de ce problème est de trouver un équivalent en $+\infty$ d'intégrales à paramètre de forme

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{tg(x)}dx$$

où les fonctions f et g vérifient certaines conditions.

1. (Préliminaire) Soient $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $c > 0$ et $b \in]0,+\infty]$. On pose, pour tout $t > 0$,

$$J(t) = \int_0^b x^\alpha e^{-tcx^\beta}dx.$$

Montrer que lorsque $t \to +\infty$,

$$J(t) \sim \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

Soient à présent f et g deux applications localement continues par morceaux de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que
(i) L'intégrale $\int_0^{+\infty}|f(x)|e^{g(x)}dx$ converge,
(ii) $\exists \delta_0 > 0\colon \forall \delta \in]0,\delta_0[, \forall x \geqslant \delta, g(x) \leqslant g(\delta)$,
(iii) On ait en 0^+ les développements asymptotiques $f(x) \sim Ax^\alpha$ et $g(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta)$, avec $\alpha > 1$, $c > 0$ et $\beta > 0$.
On pose alors, pour $t \geqslant 1$,

$$I(t) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{tg(x)}dx.$$

L'objet des prochaines questions est de prouver que, lorsque $t \to +\infty$,

$$I(t) \sim \frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)e^{at}(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

2. Expliquer comment on peut se ramener au cas $a = 0$ et $A = 1$.
   On fixe à présent $\varepsilon \in]0, 1[$, et on pose, pour alléger le calcul,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-(\alpha+1)/\beta}.$$

3. Montrer que $\exists\delta \in]0, \delta_0[, \exists t_1 > 0 \colon \forall t \geqslant t_1$,

$$(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t) \leqslant \int_0^\delta f(x)e^{tg(x)}dx \leqslant (1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-(\alpha+1)/\beta}\varphi(t).$$

4. Montrer que, δ et t_1 étant ainsi fixés, il existe aussi $t_2 > 0$ tel que

$$\forall t \geqslant t_2\,, \int_\delta^{+\infty} |f(x)|e^{tg(x)}dx \leqslant \varepsilon\varphi(t),$$

   et conclure.
5. (Corollaire) Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et soient f et g deux fonctions de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, f étant localement continue par morceaux et g étant de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant
   (i) L'intégrale $\int_a^b |f(x)|e^{g(x)}dx$ converge, et
   (ii) g' ne change de signe qu'en un seul point $c \in]a, b[$, où de plus g atteint son maximum, avec $f(c) \neq 0$ et $g''(c) < 0$.
   Montrer que, lorsque $t \to +\infty$,

$$\int_a^b f(x)e^{tg(x)}dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(c)|t}}f(c)e^{tg(c)}.$$

6. (Application) Montrer la *formule de Stirling généralisée* :
   Lorsque $x \to +\infty$, $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}$.
7. (Application) Donner un équivalent, lorsque $t \to +\infty$, de la *transformée de Mellin*

$$\mathcal{M}\{\sin\} \colon t \longmapsto \int_0^\pi x^t \sin x\,\frac{dx}{x}.$$

8. (Application) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un équivalent, lorsque $t \to 0^+$, de

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - tx\right)dx.$$