Calcul du rayon de convergence

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (non nécessairement convergente). On pose
$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k.$$
Montrer que ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}$. Donner des exemples. A quelle condition a-t-on $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$?

2. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. Démontrer que
$$R = \liminf_{n\to+\infty} |a_n|^{-1/n}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n\sin n} z^n.$$

Calcul de $\zeta(2)$

1. Démontrer que la série de fonctions
$$t \longmapsto \sin t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}$$
converge normalement vers l'identité sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

2. En intégrant, en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis celle de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Prescription des dérivées : théorème de Borel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'importe quelle suite complexe. L'objectif de cet exercice est la construction d'une application $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$, et ce *sans aucune réserve* sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Expliquer comment construire une application $\chi\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, valant identiquement 1 sur $[-1/2, 1/2]$, et nulle hors de $[-1, 1]$ De telles choses s'appellent *fonctions plateau.*

2. Construire f en utilisant χ.

Partitions de $\mathbb{N}$

1. Est-il possible de partitionner $\mathbb{N}$ en un nombre fini (mais supérieur ou égal à deux) de progressions arithmétiques de raisons toutes distinctes ?
2. Existe-t-il une partition de $\mathbb{N}$ en deux ensembles A et B telle que tout entier naturel n s'écrive d'autant de façons comme somme de deux éléments distincts de A à l'ordre près que comme somme de deux éléments distincts de B à l'ordre près ?

Involutions

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, I_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments. On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n.$$

Calculer f, et en déduire une expression de I_n.

Une identité amusante

Démontrer l'identité suivante :

$$\int_0^1 t^{-t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

On ne manquera pas de justifier la convergence de l'intégrale.

Fonction caractéristique de la loi de Cauchy

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt \ .$$

Intégrale à paramètre 1

Calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt) dt$ pour x réel.

Intégrale à paramètre 2

On considère $I \colon x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

Quel est son domaine de définition ? Où est-elle dérivable ? Calculer $I(x)$.

Intégrale à paramètre 3

On pose, pour $t > 0$, $I(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{e^x - 1} dx$.

Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$. On pourra exprimer I comme somme d'une série de fonctions.

Une (mauvaise) blague

1. On considère la fonction

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$

   Sur quel domaine de $\mathbb{R}$ f est-elle définie ? Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$. Rechercher une équation différentielle satistaite par f, et en déduire une expression de f.

2. Tout ceci était-il bien nécessaire ?

Intégrale de Dirichlet

Le but de cet exercice est de calculer l'*intégrale de Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Pour ce faire, on pose, pour tout t réel positif,

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+t} dx \text{ et } J(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx.$$

1. Montrer que I et J sont bien définies, continues sur $\mathbb{R}^+$, et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre deux vérifiée par I sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis faire de même pour J.
3. Conclure.

Transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz

On considère, sur *l'espace de Schwartz des fonctions lisses de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées*

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ x^n f^{(k)}(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \right\},$$

la *transformée de Fourier*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}\colon & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & f & \longmapsto & \left(\widehat{f} : y \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right) \end{array}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est bien définie.
2. On considère, pour σ réel,

   $$\begin{array}{rccc} g_\sigma\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-x^2/2\sigma^2} \end{array}.$$

   Pour quelles valeurs de σ a-t-on $g_\sigma \in \mathcal{S}$? Calculer alors $\widehat{g_\sigma}$.
3. Démontrer la *formule d'inversion de Fourier* :

   $$\forall f \in S,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x).$$

   On pourra considérer $\widehat{\widehat{f} g_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et *on admettra* qu'on peut intervertir à volonté les intégrales.
4. Résoudre dans $\mathcal{S}$ les équations $f^{(4)} + 2f^{(3)} - f' + f = 0$ et $\widehat{f} = 2\pi f$.

Transformée de Laplace

Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que
$\forall x > 0,\ \mathcal{L}f(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ existe.

1. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}f(x)$.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Et si on suppose qu'en $+\infty$, $f(t) = o(t)$?
4. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_*^+$, alors f est identiquement nulle.
5. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}f(x)$ existe. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^T tf(t)dt = o_{T\to+\infty}(T)$.

   On pourra considérer $g(t) = \dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t uf(u)du$...