Plus vite !

Un candidat à l'X court le 100 mètres en 10 secondes. Montrer que si ses vitesses initiale et finale sont nulles, alors il y a un moment où son accélération est supérieure à $4m.s^{-2}$.

Des sommes pas vraiment de Riemann

Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k\alpha}\right)$, où $\alpha > 0$.

Une autre somme

Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor$ quand $n \to +\infty$.

Sommes de qui ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

1. Montrer que u_n converge. On note ℓ sa limite.
2. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.
3. Généraliser.

Et pourquoi pas un produit ?

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Le monde à l'envers

En utilisant des sommes de Riemann, calculer

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2r\cos t + r^2)dt$$

pour $r \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Une équation intégrale

Déterminer toutes les applications $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continues par morceaux, telles que

$$\exists a \in [0,1]\ :\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

Une autre équation intégrale

Déterminer toutes les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous x et y réels,

$$f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt.$$

Moyennes mobiles

Déterminer toutes les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt.$$

Zone d'importance

Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$.
2. Soit $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue à valeurs strictement positives. Montrer qu'à nouveau $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n g(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$.
3. On suppose de plus que f n'est pas identiquement nulle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_a^b f(t)^n g(t)dt$. Étudier la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une intégrale définie

$$\text{Calculer l'intégrale } I = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x}\ .$$

Une intégrale indéfinie

$$\text{Calculer} \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1} \ .$$

Intégrale de Dirichlet

$$\text{Calculer } \Delta = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx \ .$$

Pour calculer

$$\text{Etudier } \lim_{x \to +\infty} x \exp\left(- \int_0^x \frac{dt}{3 + \sqrt{t^2 + 4t}} \right) \ .$$

Estimation du maximum d'un polynôme

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ les fonctions polynômes

$$P_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - i),$$

et on pose $M_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant n} |P_n(x)|$. Le but de l'exerice est d'obtenir un équivalent de M_n.

1. En comparant
$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad \text{et} \quad \int \frac{dt}{t},$$
démontrer que $H_n \sim \log(n)$.
2. Montrer que, pour $x \in [1, n-1]$, on a
$$|P_n(x)| \leqslant \frac{(n-1)!}{2}.$$
3. Calculer la *dérivée logarithmique* $\frac{P_n'}{P_n}$. En déduire que sur chaque segment $[i, i+1]$, $0 \leqslant i < n$, P_n a un unique extremum local.
4. Soit $a_n \in]0, 1[$ l'abscisse du premier extremum local de P_n. Montrer que $a_n \sim \frac{1}{\log n}$.
5. En déduire un équivalent de M_n.

Inégalité de Wirtinger

Soit E l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulles en 0 et en 1.

1. Soit $f \in E$. On pose
$$I_1 = \int_0^1 f(t)f'(t)\cot(\pi t)dt \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan(\pi t)^2}(1+\tan(\pi t)^2)dt.$$
Vérifier que les intégrandes se prolongent par continuité et donc que I_1 et I_2 sont bien définies. Comparer I_1 et I_2.
2. En déduire l'*inégalité de Wirtinger* :
$$\forall f \in E, \quad \int_0^1 f'^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2.$$
3. Quels sont les cas d'égalité ?

Méthode de Simpson

1. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On cherche à approximer $\int_a^b f(t)dt$. Pour ce faire, la *méthode de Simpson* procède comme suit : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on coupe le segment $[a,b]$ en $2n$ morceaux de tailles égales par la subdivision $a = x_0 < \cdots < x_{2n} = b$, où $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, puis, sur chaque segment $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, on approxime f par la fonction du second degré coïncidant avec elle en les trois points x_{2i}, x_{2i+1} et x_{2i+2} ; enfin, on calcule l'intégrale de cette fonction sur $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, et on somme sur $0 \leqslant i < n$.
Justifier. Calculer explicitement l'approximation de $\int_a^b f(t)dt$ ainsi obtenue. On notera $I(f)$ cette approximation.
2. On cherche à présent à vérifier la convergence de cette méthode, et à estimer sa vitesse de convergence. Soient $\alpha > 0$ et $g\colon [-\alpha, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application impaire 5 fois dérivable. Établir l'existence d'un $\theta \in]0, \alpha[$ tel que
$$g(\alpha) = \frac{\alpha}{3}(g'(\alpha) + 2g'(0)) - \frac{\alpha^5}{180}g^{(5)}(\theta).$$
3. En déduire que si $f \in \mathcal{C}^5([a,b], \mathbb{R})$, alors il existe un $\theta \in]a,b[$ tel que
$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(\theta).$$

4. En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^4$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5\|f^{(4)}\|_\infty}{2880n^4}.$$

Remarque : La méthode de Simpson converge donc en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$. A titre de comparaison, la méthode des rectangles (autrement dit les sommes de Riemann) converge en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ (voir **Sommes de qui ?**), et la méthode des trapèzes, en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Méthode de Gauss

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n le n-ième *polynôme de Legendre*

$$L_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n.$$

Montrer que pour tout polynôme Q de degré au plus $n-1$, on a

$$\int_{-1}^1 L_n(x)Q(x)dx = 0.$$

Remarque : Ceci signifie que, si on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) = \int_{-1}^1 PQ$, alors L_n est orthogonal au sous-espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En particulier, les L_n forment une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que les L_n sont scindés à racines simples dans $\mathbb{R}$, et que toutes leurs racines se trouvent dans $]-1,1[$.
3. Soient $x_1, \cdots, x_n$ les racines de L_n. Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que pour tout polynôme Q de degré au plus $2n-1$, on ait

$$\int_{-1}^1 Q(x)dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i Q(x_i).$$

Remarque : On en déduit l'approximation

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Un problème d'optimisation

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la borne inférieure de

$$\int_0^1 f''(t)^2 dt$$

pour les $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a$. Est-elle atteinte ? Si oui, par quelles fonctions ?

Inégalité de Van der Corput

1. Soit φ une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est *a priori* la meilleure majoration possible pour
$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)} dx \right|$$
si on ne suppose rien d'autre sur φ ? Quelle(s) information(s) permettraient d'espérer une meilleure majoration ?
2. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tous $a < b$, pour tout $\lambda > 0$, et pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $|\varphi'| \geqslant \lambda$ et φ' monotone,
$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)} dx \right| \leqslant \frac{C_1}{\lambda}.$$
3. Plus généralement, montrer qu'il existe une suite de réels strictement positifs $(C_k)_{k \geqslant 2}$ telle que pour tout $k \geqslant 2$, pour tous a et b, pour tout $\lambda > 0$, et pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^{k+1}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $|\varphi^{(k)}| \geqslant \lambda$,
$$\left| \int_a^b e^{i\varphi(x)} dx \right| \leqslant \frac{C_k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}.$$

Rectangles semi-entiers

Un rectangle du plan est dit *semi-entier* si au moins un de ses côtés est de longueur entière. Un rectangle pavé par des rectangles semi-entiers est-il lui-même nécessairement semi-entier ?